Parité - Periodicité

f est continue sur $[a,b]$

- f est paire sur $[-a,a]$; on a : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- f est impaire sur $[-a,a]$; on a $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- si f est continue sur $\mathbb{R}$ et periodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$.

Exemples

- $I = \int_{-5}^{5} x^3 + x\,dx$

  $= 0$

  car : $f : x \longmapsto x^3 + x$ est une fonction impaire car.
  $\forall x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$ et
  $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$
  $= -(x^3 + x)$
  $= -f(x)$

- $J = \int_{-1}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$, on a $g : t \longmapsto t^4 + t^2 - 1$ est paire car $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t) \in \mathbb{R}$.

  $= \int_{0}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$.

  $g(-t) = (-t)^4 + (-t)^2 - 1$
  $= t^4 + t^2 - 1 = g(t)$